数理解析研究所講究録
140巻 1972年 50-60

多値論理とオートマトン

野崎　昭弘（東大理学部）

昨年，同じ題で行った報告の線に沿って，その後の結果を報告したい。概念・記号の定義で，ここに示されていないものについては，前回の報告（数解研講究録，vol. 81，pp. 176-206）を参照して頂きたい。

我々の関心事は，いわゆる completeness problem である。しかし，合成の単位として，時間遅れゼロの論理素子の代りに，（多値）オートマトンを考えた点が特徴である。今回は，次の三つのテーマについて，得られた結果を述べたい。

1）*－maximal sets の特徴づけについて．――目標はすべての*－maximal sets の分類である。今回は，いくつかの*－maximal sets の系列を示し，次のステップとして考えられる問題をいくつか提出する。

2）～－maximal sequences の特徴づけについて．――さしあたりの目標は，三値の場合の，すべての～－maximal sequences の決定である。今回は，定田によって得られた基本的な定理を紹介する．

3) より広いオートマトンのクラスに対する完全性の問題の考察. ——定義のむずかしさを指摘し，いくつかの定式化の間のギャップを明らかにしたい.

§1 $*$-maximal sets の特徴づけ

k 値論理関数族の全体を Ω とし，$F \subseteq \Omega$ とする。

$$F^{(1)} = F \circ \mathcal{P}, \quad F^{(n)} = F^{(n-1)} \circ F^{(1)}, \quad F^{*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{(n)}$$

とおく（$\mathcal{P}$，（$\circ$）等については，［1］参照）.

Lemma 1 (a) F maximal $\Rightarrow$ F $*$-maximal

(b) $K(a,b)$, $a \neq b$ は $*$-maximal

但し，$K(a,b) = \{ f \in \Omega ; f(a,\cdots,a) = f(b,\cdots,b) \}$, $k \geq 3$.

前回報告したように，$k=2$ ならば8個（Kudryavtsev），$k=3$ ならば30個（野崎）の $*$-maximal sets が存在する.

また，［1］定理3（p.198）からわかるように，一般に

$$F \ *\text{-maximal}, \quad F \neq K(a,b)$$

$$\Rightarrow (\exists n \geq 1), (\exists M : \text{maximal set}) : F^{(n)} \subseteq M \qquad (1)$$

である. そこで，条件(1)を手がかりに，$*$-maximal sets を求めてみる. まず，M が‘D型’の maximal set である場合を考察する。

定義 1 $(k) = \{0, 1, \cdots, k-1\}$, $S \subseteq (k)$ とする.

$$D_S = \{ f \in \Omega \ ; \ f(S, \cdots, S) \subseteq S \}$$

<u>Lemma</u>　2　　$S \neq \phi$, (k) ならば, D_S は maximal である。

<u>定義</u>　2　　$a_0, \cdots, a_{t-1} \in (k)$, $a_i \neq a_j$ for $i \neq j$ に対し,

$$C(a_0, \cdots, a_{t-1}) = \{ f \in \Omega \ ; \ f(a_i, \cdots, a_i) = a_{i \oplus 1} \}$$
$$\text{for} \quad 0 \leqq i \leqq t-1$$

ただし, $\oplus$ は modulo t の和である。

<u>定理</u>　1　　(a)　$C(a_0, \cdots, a_{t-1})$ は $*$-maximal である。

特に, $t \geqq 1$ ならば, 'maximal でない $*$-maximal set' になっている。

(b)　F が, maximal でない $*$-maximal set で,

$$F^{(n)} \subseteq D_{\{a\}}$$

をみたすならば, 適当な

$$a_0 = a, \ a_1, \cdots, a_{t-1} \quad (t \geqq 1)$$

について

$$F = C(a_0, \cdots, a_{t-1})$$

となる。

<u>注意</u>　これで $S = \{a\}$ の場合が片付いた。

<u>定義</u>　3　　$A_0, \cdots, A_{t-1} \subseteq (k)$, $A_i \cap A_j = \phi$ for $i \neq j$, かつどの A_i も2個以上の要素を含むとする。

$$C(A_0, \cdots, A_{t-1}) = \{ f \in \Omega \ ; \ f(A_i, \cdots, A_i) \subseteq A_{i \oplus 1} \}$$

for $0 \leq i \leq t-1$

<u>定理</u> 2　(a) $A_0, \cdots, A_{t-1}$ が定義3の条件をみたす集合列ならば，$C(A_0, \cdots, A_{t-1})$ は $*$-maximal である．

(b) F が maximal でない $*$-maximal set で，

$$F^{(n)} \subseteq D_S$$

をみたし，S が2個以上の相異る要素を含むならば，適当に

$$A_0 = S, \quad A_1, \cdots, A_{t-1}$$

をとると

$$F = C(A_0, \cdots, A_{t-1})$$

になる．

次に，'p 型' maximal sets から派生する $*$-maximal sets を調べる．

$p: (k) \longrightarrow (k)$ を任意の全単射（すなわち (k) の permutation）とする．$p^d = \text{Identity}$ となる最小の整数（≥ 1）を，p の位数といい，$d(p)$ であらわすことにする．

<u>定義</u> 4　$C_{p,i} = \{ f \in \Omega ;\ f \circ p = p^i \circ f \}$

ただし　$f \circ p(x_1, \cdots, x_n) = f(p(x_1), \cdots, p(x_n))$ とする．

<u>定理</u> 3　$C_{p,i}$ が $*$-maximal

$\Leftrightarrow$ $C_{p,1}$ が maximal で，$0 < i < d(p)$．

<u>注意</u>　$C_{p,1}$ が maximal $\Leftrightarrow$ p が素数次の順回置換（同次数）の直積としてあらわされる（Rosenberg，[2]）

次に，$\mathcal{R}$を(k)の中の順序関係で，最大・最小元を有するものとする．

$$F(\mathcal{R}) = \{ f \in \Omega \;;\; x_i \,\mathcal{R}\, y_i \Rightarrow f((x_i)) \leq f((y_i)) \}$$

とおけば，$F(\mathcal{R})$は maximal になる．

Lemma 3　$F(\mathcal{R}, \mathcal{R}^T)$は，$\mathcal{R}$が lattice ならば $*$-maximal になる．ただし，$\mathcal{R}^T = \{ (b, a) \;;\; (a, b) \in \mathcal{R} \}$

問　$\mathcal{R}$が lattice でない場合，いつ$I \in F(\mathcal{R}, \mathcal{R}^T)$となるか．

一般の$\mathcal{R}$について，定理1，2に対応する定理はまだ得られていない．

§2　$\sim$-maximal sequences の特徴づけ

[1]の結果によれば，$\sim$-maximal sequences (S_p)は次の2種類に分類できる。

(1)　$\exists a \neq b \;\; \forall p > 0 \;:\; S_p \subseteq K(a, b)$

(2)　$\exists M$: maximal set，$\exists p > 0, \forall q \geq 0 : S_{pq} \subseteq M$

条件(1)をみたすものについては，次の定理がある。

定理 4　（疋田輝雄）　$\sigma = (S_p)$が$\sim$-closed で，(1)の条件が成りたつならば，Ω_1のある subsets S，Tが存在して，次の条件をみたす．

1)　S，TはΩ_1の proper subsemigroup である．

2)　$T = K(a_1, b_1) \cap \ldots \cap K(a_n, b_n) \cap \Omega$ と書ける。

3) $T \circ S \subseteq T$

4) $S_0 = F(S)$, $S_p = F(S, T)$ for $p \geq 1$.

注意 すべての$p \geq 1$に対し，すべての$f \in S_p$が定数関数になる場合を除けば，S，Tを次のような2項関係におきかえてよい．

$S \subsetneqq (k^2)$, $S \neq \phi$, $S \ni (a, b)$, $T = \{(a, a) ; a \in (k)\}$

$k = 3$の場合，疋田・野崎は次のような～-maximal sequencesを得た（vi, viiのみ野崎による）。以下，$A = S_0$, $B = S_p$ ($p \geq 1$)と略記する．

	A	B	
(i)	$D_a \cap D_b$	$K(a, b)$	….. $a \neq b$, 3通り
(ii)	$S(a, b)$	$Y(a, b)$	〃

ただし，a，bを入れかえる互換をτとするとき，

$S(a, b) = \{f \in D_{\{a,b\}} ; f \circ \tau = \tau \circ f$ for $(x_i) \in \{a, b\}^n\}$

$Y(a, b) = \{$ 〃 $; f \circ \tau = f$ for $(x_i) \in \{a, b\}^n\}$

(iii)	$D_{\{a,b\}}$	$Const(a, b)$

ただし

$Const(a, b) = \{f \in \Omega ;$ fは$\{a, b\}$上で定数関数$\}$

(iv) $\lambda(x) = x \oplus 1$（$\oplus$はmod 3の和）とおくとき，

	$\{f : f \circ \lambda = \lambda \circ f\}$	$\{f : f \circ \lambda = f\}$
(v)	D_a	$\{0, 1, 2\}$

(vi) $F(\{[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}][\begin{smallmatrix}c\\c\end{smallmatrix}]\})$ $F(\{[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}][\begin{smallmatrix}c\\c\end{smallmatrix}]\}, \{[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}][\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}][\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}]\})$

(vii) (ii)と同じτについて

$\{f : f\circ\tau = \tau\circ f\}$ $\{f : f\circ\tau = f\}$

条件(1)をみたす〜-maximal sequencesは，これらで尽きている。

(2)をみたすものについても，足田が一般の$k \geqq 3$についての定理を与えた他，$k=3$の場合の具体的なlist upに成功しており，別に近く発表の予定である。

なお，$k=2$の場合のKudryavtsevの結果は，足田の結果から容易に導びかれる。

問 一般の$k \geqq 3$について，〜-maximal sequencesの分類を与えよ。

これは*-maximal setsの分類と平行して進められる筈である。我々は，足田の結果で一応の段階に到達したと考えているが，Rosembergの結果とあわせれば，これを解く道具立ても（少くとも大道具は）そろっているので，ただちに攻を続行してみても面白いであろう。

§3 オートマトンのクラスの完全性

完全性の定義にあたって，次の3点が問題になる。

a) 合成の単位となるオートマトンのクラス，および合成

の目標となるオートマトンのクラスをどのように限定するか。

b)'合成'の定義（単位オートマトンの組みあわせかたの定義）

c)'同等'の定義（合成オートマトンによって，目標とするオートマトンが'表現'あるいは'実現'されている，ということの定義）

単位となるオートマトンのクラスを$\mathcal{A}$，目標となるオートマトンのクラスを$\mathcal{B}$としよう．すると，合成・同等の定義さえ与えられれば，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ の完全性が次のように定義される．

$\mathcal{F}$が($\mathcal{B}$-) complete $\Leftrightarrow$ $\forall$オートマトン $A \in \mathcal{B}$
$\exists$オートマトンA'：A'は$\mathcal{F}$から合成可能で，A'はAと同等．

さて，a)，b)，c)の各点について，次のような選択肢がある．

a) 時間遅れのない論理素子 ..... *Post*，*Słupecki* 等
単位時間遅れをもつ論理素子 ..... *von Neuman*，伊吹等
〃 の整数倍の遅れをもつ論理素子 ..... *Kudryavtsev*，野崎
finitely definite automaton ..... *Loomis*
finite automaton ..... *Minsky*，野崎

b) feedback loop を許すか否か．

'路程差'（伊吹）を許すか否か.

c) 入力の間隔をあけることを許すか.

最初に dummy input を食わすことを許すか.

[例] $\mathcal{A}$として単位時間遅れをもつ論理素子のクラスをとり, $\mathcal{B}$として一般の automaton のクラスを選んだ場合, b), c) の選択の次のような組み合せが考えられる.

	FBL	路程差	dummy input	入力間隔
1)	×	×	×	単位時間
2)	×	○	×	〃
3)	×	○	○	〃
4)	×	○	○	一定時間
5)	○	○	○	〃

5)は Minsky によって考察された. また, $\mathcal{B}=\mathcal{A}$（論理素子のクラス）の場合, 1)は Kudryavtsev によって, 3)は伊吹によって考察された.

$\mathcal{A}=\mathcal{B}=$'単位時間の整数倍の遅れをもつ論理素子のクラス'の場合に, 1)〜5)それぞれについて定義される完全性の概念を, 次のように呼んで区別することにしよう (cf. [3]).

1) ~-complete

2) strongly (k)-complete

3) (k)-complete

4) weakly (k) - complete

5) (k) - universal

すると，次の定理が成りたつ（[3]）

<u>定 理</u> 5

1) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 2) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 3) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 4) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 5)

<u>注 意</u> 2) $\not\Leftarrow$ 3) は，$k \geqq 3$ の場合のみ証明された．

4) $\not\Leftarrow$ 5) は，一般のオートマトンに関して証明された．

<u>問</u> $k=2$ の場合，2) $\not\Leftarrow$ 3) が成りたつか．

<u>問</u> $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ を上のように限定したとき，4) $\not\Leftarrow$ 5) が成りたつか．

合成の目標を任意の有限オートマトンにおく場合には，‘同等’の代りに‘同期的に表現可能’の概念が有用である．（[3]をみよ．）

<u>定 理</u> 6 $\mathcal{F}$ を単位時間の整数倍の遅れをもつ論理素子のある集合とする．

任意のオートマトンAを，同期的に表現可能なオートマトンA′が，$\mathcal{F}$ から合成可能

$\Longleftrightarrow$ 任意の論理関数 f を計算するオートマトン A_f が，$\mathcal{F}$ から合成可能．

この定理によって，オートマトンの合成の問題が，論理関

数の合成の問題に帰着される.

参考文献

[1] 野崎昭弘「多値論理とオートマトン」数解研講究録 vol. 81, pp 176-206.

[2] I. Rosenberg, Structure de la classe des fonctions définies dans un ensemble fini quelconque, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Tom 260 (1965)

[3] A. Nozaki, Functional Studies of Automata (I), (II) Scientific Papers of College of General Eductions, University of Tokyo, vol. 20, pp. 21-36, pp. 109-121.